На правах рукописи

Екол

КОЛПАКОВА Екатерина Алексеевна

СТРУКТУРА ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ — БЕЛЛМАНА И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2011

Работа выполнена в отделе динамических систем Института математики и механики Уральского отделения РАН.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук Субботина Нина Николаевна
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор Филиппова Татьяна Федоровна, кандидат физико-математических наук Лахтин Алексей Станиславович
Ведущая организация:	Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, ВМиК, г. Москва

Защита состоится 27 апреля 2011 года в 10 часов на заседании специализированного совета Д 004.006.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Институте математики и механики Уральского отделения РАН по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан 24 марта 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук Н.Ю. Лукоянов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию структуры и связей обобщенных решений в задаче Коши для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана и квазилинейного уравнения первого порядка в терминах классических характеристик этих уравнений. Рассмотрены приложения полученных теоретических результатов к решению задач оптимального управления.

Актуальность темы. При описании большого числа физических процессов возникают нелинейные уравнения в частных производных первого порядка. Одним из таких уравнений является уравнение Гамильтона– Якоби, решения которого используются при описании движения тел в рамках классической механики. Существует тесная связь уравнений типа Гамильтона–Якоби с задачами динамической оптимизации, которые рассматриваются в вариационном исчислении, в теории оптимального управления и дифференциальных играх. Для задачи динамической оптимизации определена функция цены, которая каждому начальному состоянию динамической системы ставит в соотвстствие оптимальное значение функционала платы. Функция цены, как правило, негладкая, но в точках дифференцируемости удовлетворяет соответствующему уравнению Гамильтона– Якоби.

Для описания поведения сплошной среды теоретическая физика использует различные модели, которые также приводят к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. Например: уравнение эйконала в геометрической оптике, транспортное уравнение, уравнение Эйлера для идеальной несжимаемой жидкости. В газовой динамике большое количество процессов описывается квазилинейными уравнениями, которые являются следствиями физических законов сохранения массы, энергии, импульса.

Классическим решением уравнения в частных первого порядка называется непрерывно дифференцируемая функция, которая удовлетворяет этому уравнению во всех точках области определения. Одним из методов построения единственного классического решения краевой задачи для уравнения в частных производных первого порядка является метод характеристик Коши, согласно которому отыскание классического решения сводится к решению специальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, построенной по уравнению в частных производных первого порядка. Метод Коши обнаружил, что классическое решение нелинейного уравнения в частных производных первого порядка существует, как правило, локально в окрестности заданного гладкого краевого многообразия.

Однако в математических моделях, описывающих физические процессы, существует потребность изучения негладких и разрывных функций, которые определены глобально, удовлетворяют уравнениям в частных производных первого порядка в точках дифференцируемости, и их графики проходят через краевое многообразие. Для корректного описания таких функций требуется понятие обобщенного решения уравнения в частных производных.

Большой интерес к развитию теории обобщенных решений уравнений в частных производных был проявлен в 50-е–60-е годы XX века. Существенные результаты были получены в работах О.А. Олейник, А.М. Ильина, О.А. Ладыженской, Б.Л. Рождественского, Н.Н. Яненко, Н.С. Бахвалова, С.К. Годунова, А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, С.Л. Соболева, E. Hopf, P. Lax, C.M. Dafermos, W. Fleming.

Основные подходы, которые использовались при введении понятия обобщенного решения базировались либо на методе исчезающей вязкости, либо на обобщениях метода характеристик Коши, либо на интегральных и вариационных методах, привлекавших понятие обобщенных функций и обобщенных производных, а также на численных аппроксимациях.

В 70-е годы развитие аппарата негладкого анализа позволило существенно продвинуть теорию обобщенных решений уравнений в частных производных. Большой вклад в развитие негладкого анализа внесли работы F.H. Clarke, который ввел понятие субградиента. Другие типы субградиентов ввели в своих работах R.T. Rockafellar, Б.Ш. Мордухович. Существенную роль в развитии негладкого анализа сыграли Б.Н. Пшеничный, В.Ф. Демьянов.

В 60-е–70-е годы С.Н. Кружковым было предложено понятие энтропийного решения для квазилинейного уравнения, сочетающее интегральный подход с конечно-разностным и опирающееся на аппарат выпуклого анализа. Для выделения содержательного единственного решения С.Н. Кружков ввел интегральное условие неубывания энтропии. Это условие определяет возможное направление быстрого изменения обобщенного решения. В дальнейшем этот подход был развит в работах Е.Ю. Панова, А.Ю. Горицкого, Г.А. Чечкина, Н.С. Петросян, Ph. Benilan.

В начале 80-х годов G. Crandall и P.L. Lions[1] ввели понятие вязкостного решения уравнения в частных производных первого порядка. Определение вязкостного решения базируется на локальных гладких выпуклых и вогнутых аппроксимациях обобщенного решения. Термин "вязкостные решения" был использован потому, что для доказательства существования этого решения авторы использовали метод исчезающей вязкости. Инфинитезимальная форма определения вязкостного решения опирается на аппарат негладкого анализа и использует понятия суб- и супердифференциалов.

В теории вязкостных решений были доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения для различных типов краевых задач. Предложены конструктивные и численные методы решения этих задач. Большой вклад в исследование вязкостных решений внесли работы L. Evans, W. Fleming, R.J. Elliott, N.J. Kalton, M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta, M. Falcone, H. Ishii, E.N. Barron, R. Jensen, P. Cannarsa, H. Frankowska, H.M. Soner, I. Capuzzo-Dolcetta, P. Souganidis, B. Perthame.

В начале 80-х годов А.И. Субботиным[2] был предложен минимаксный подход к построению обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка. Термин "минимаксное решение" отражает истоки этой теории в формализации позиционной дифференциальной игры, развитой в школе Н.Н. Красовского[3]. Согласно минимаксному подходу график обобщенного минимаксного решения инвариантен относительно комплексов гамильтоновых характеристических дифференциальных включений, определяемых аксиоматически. Инфинитезимальная форма определения минимаксного решения опирается на пару дифференциальных неравенств, использующих верхние и нижние полупроизводные Дини.

В теории минимаксных решений получены теоремы существования и единственности для различных типов краевых задач, предложены аналитические, конструктивные и численные методы решения этих задач. Развиты приложения этой теории к решению задач оптимального управления и дифференциальных игр. Установлена эквивалентность вязкостного и минимаксного определений обобщенных решений уравнения Гамильтона–Якоби. Существенный

[1] *Crandall G. Lions P.L.* Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations // Transactions of the American Mathematical Society, 1983, Vol. 277, № 1, pp. 1-42

[2] *Субботин А.И.* Обобщенные решения дифференциальных уравнений первого порядка. Ижевск: РХД. 2003. 336 с.

[3] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука. 1968. 475 с.

вклад в развитие теории минимаксных решений внесли работы В.Н. Ушакова, А.М. Тарасьева, В.С. Пацко, Н.Ю. Лукоянова, С.А. Брыкалова, Х.Г. Гусейнова, В.Я. Джафарова, А.А. Успенского, С.И. Кумкова, А.Ф. Клейменова, Л.Г. Шагаловой, А.С. Лахтина и их учеников.

Отметим, что в 90-е годы были предложены и другие подходы к определению решения уравнения Гамильтона—Якоби на базе обобщений гамильтоновой характеристической системы. Многие современные исследования задач динамической оптимизации и краевых задач для соответствующих уравнений типа Гамильтона—Якоби опираются на результаты работ А. Б. Куржанского, В.И.Благодатских, С.М. Асеева, А.В. Арутюнова, Ю.С. Ледяева, А.А. Меликяна, J.P. Aubin, F.H. Clarke, H. Frankowska, G. Haddad, Т.Ф. Филипповой, А.А.Толстоногова.

Классические характеристики также использовались для построения обобщенного решения уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана в работах F. Clarke, Н.Н. Субботиной, А.С. Братуся, А.И. Овсеевича, А.А. Меликяна, для построения обобщенного решения квазилинейного уравнения в работах О.А. Олейник, И.М. Гельфанда, Н.Н. Яненко, Б.Л. Рождественского.

Связь между решениями задачи Коши для уравнения Гамильтона—Якоби и квазилинейного уравнения исследовалась в работах Б.Л. Рождественского, Н.Н. Кузнецова с помощью метода потенциала.

Применяя методы вариационного исчисления для решения задачи Коши уравнения в частных производных первого порядка, E. Hopf, P. Lax, О.А. Олейник получили и обосновали аналитические формулы для частных случаев этих уравнений.

В настоящее время для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона—Якоби в работах В.Н. Ушакова, В.С. Пацко, А.М. Тарасьева, А.А. Успенского, P. Souganidis, M. Falcone активно разрабатываются и применяются численные методы.

Описание структуры и связей обобщенных решений различных типов уравнений в частных производных первого порядка и исследование роли классических характеристик в конструкциях этих решений остаются актуальными задачами теории обобщенных решений.

Исследования обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка важны сами по себе, а также они полезны для приложений к решению задач динамической оптимизации.

Одним из разделов динамической оптимизации является теория оптимального управления, восходящая к работам Л.С. Понтрягина[4], В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко, R. Isaacs, R. Bellman, Н.Н. Красовского, W.H. Fleming, A. Fridman.

В настоящее время теория оптимального управления получила мощное развитие и имеет многочисленные практические применения. Фундаментальный вклад в развитие этой теории внесли Н.Н. Моисеев, Б.Н. Пшеничный, Ф.Л. Черноусько, Д.В. Аносов, В.И. Арнольд, В.А. Якубович, Ю.С. Осипов, А.Б. Куржанский, А.И. Субботин, А.В.Кряжимский, L.D. Berkovits, A.E. Bryson, G. Leitman, Y.-C. Ho, J. Warga, R.J. Elliott, N.J. Kalton.

Существенное развитие теория получила в работах В.И. Зубова, В.Ф. Кротова, Ф.М. Кирилловой, Р.Ф. Габасова, А.А. Меликяна, А.А. Чикрия, С.М. Асеева, В.Н. Ушакова, А.Г. Ченцова, Л.А. Петросяна, С.В. Чистякова, А.А. Аграчева, Л.Д. Акуленко, А.В. Арутюнова, В.И. Благодатских, Ф.П. Васильева, Н.Л. Григоренко, А.Я. Дубовицкого, А.А. Милютина, М.С. Никольского, Л. А. Петросяна, В.М. Тихомирова, М.И. Зеликина, А.Д. Иоффе, Ю.С. Ледяева, А.В. Дмитрука, В.Г. Гайцгори, М.Г. Дмитриева, Э.Г. Альбрехта, Н.Н. Субботиной, Н.Ю. Лукоянова, В.С. Пацко, А.М. Тарасьева, Т.Ф. Филипповой, М.И. Гусева, В.И. Максимова, А.И. Короткого, Е.К. Костоусовой, С.Т. Завалищина, А.Н. Сесекина В.Б. Костоусова и их учеников.

Как хорошо известно, функция цены задачи оптимального управления совпадает с единственным минимаксным/вязкостным решением краевой задачи для уравнения Гамильтона--Якоби— Беллмана. Функция цены определяет оптимальный результат для начального состояния управляемой системы. Кроме того, функция цены играет ключевую роль в построении оптимальных и почти оптимальных способов управления по принципу обратной связи.

Основополагающее значение в теории оптимального управления играет принцип максимума Л.С. Понтрягина — необходимое условие оптимальности. Гамильтонова форма этих условий (см. F. Clarke[5], S. Miricha, Н.Н. Субботи-

---

[4] *Понтрягин Л.С. Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1968. 356 с.

[5] *Clarke F.H.* Necessary conditions for nonsmooth variational problems // Optimal control theory and its applications, Lect. Notes Econ. and Math. Syst.1974, Vol. 106, P. 70—91

на) связывает экстремали и коэкстремали задачи оптимального управления с характеристиками уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана.

Актуальным и полезным является исследование приложений теории обобщенных решений уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана для численного решения задачи оптимального управления.

Цель работы. Исследование структуры минимаксного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана, описание множества сингулярности (множества точек недифференцируемости) минимаксного решения, описание связи между минимаксным решением и обобщенным решением задачи Коши для квазилинейного уравнения. Исследование роли классических характеристик в конструкциях этих решений.

Приложение теории обобщенных решений уравнений Гамильтона—Якоби—Беллмана для численного решения задачи оптимального управления с терминальным функционалом платы.

Методы исследования. Исследования данной работы опираются на обобщение метода характеристик Коши, аппарат негладкого анализа, методы теории управления, теорию дифференциальных включений, теорию многозначных отображений и теорию инвариантности.

Научная новизна. Описана структура графика минимаксного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана в терминах классических характеристик этого уравнения.

Введено новое понятие глобального обобщенного решения задачи Коши для одномерного квазилинейного уравнения в терминах классических характеристик и получена его репрезентативная формула. Показано, что потенциалом для глобального обобщенного решения квазилинейного уравнения является минимаксное решение соответствующего уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана. Описана структура множества сингулярности минимаксного решения в терминах классических характеристик уравнения Гамильтона—Якоби и линий Ранкина — Гюгонио.

Предложены новые достаточные условия существования программного оптимального управления в задаче управления с терминальной платой.

Разработана новая процедура численного построения оптимального программного управления с помощью попятного интегрирования гамильтоновой характеристической системы для уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана, и получены оценки аппроксимации оптимального результата.

Теоретическая и практическая значимость. В работе исследована роль классических характеристик для теории обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби и квазилинейных уравнений.

Предложены репрезентативные формулы обобщенных решений, описана структура множества сингулярности минимаксного решения в терминах классических характеристик.

Выявлено свойство инвариантности графиков обобщенных решений относительно гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Это свойство позволяет разрабатывать новые эффективные методы построения обобщенных решений и обоснования этих конструкций.

Рассмотрены приложения полученных результатов для решения задач оптимального управления с терминальным функционалом платы. Предложен и обоснован численный метод построения оптимального программного управления, опирающийся на гамильтонову форму необходимых и достаточных условий оптимальности. Проведены численные расчеты для ряда модельных примеров.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав и списка литературы. Объем работы – 121 страница, включая 9 рисунков. Библиография содержит 153 наименования. В работе цитируемые результаты носят название утверждений, а результаты, полученные автором, называются теоремами.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на российских конференциях: 39–41-й Всероссийской молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики"(Екатеринбург, 2008, 2009,2010),научной конференции–семинаре "Теория управления и математическое моделирование", посвящённая памяти Н.В. Азбелева (Ижевск, 2008), IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006), международных конференциях: "Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби" (Екатеринбург, 2005 г.), "Устойчивость, управление и моделирование динамических систем", посвященного 75-летию И.Я. Каца (Екатеринбург, 2006), "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления"(Москва, 2008), "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация"(Минск, 2008), "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященная 70-летию В.А. Садовничего (Москва, 2009), международной конференции по математической теории управления и механике (Суздаль, 2009), "Актуальные проблемы теории устойчивости и управления" (Екатеринбург, 2009), международной научной конференции, посвященной 105-летию С.М. Никольского, "Современные проблемы анализа и преподавания математики"(Москва, 2010), XII International Symposium on Dynamic Games and Applications, (Sophia-Antipolice, 2006), 13-th International Workshop IFAC on Control Applications of Optimization (Paris, 2006), X IFAC Workshop on Control Applications of Optimization(Jyvaskyla, 2009), а также на семинарах отдела динамических систем ИММ УрО РАН и кафедры системного анализа ВМиК МГУ.

Публикации. Материал диссертации опубликован в двадцати семи работах. Из них 4 публикации из списка ВАК ([1]–[4]), 2 публикации в иностранных журналах ([5]–[6]), 6 публикаций в рецензируемых российских сборниках и журналах ([7]–[12]) и 15 тезисов.

Основные результаты диссертации

Во **введении** дается краткий обзор состояния современной теории обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка, определяется цель работы, описана структура диссертации.

Первая глава состоит из четырех параграфов и посвящена исследованию минимаксного решения краевой задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби –Беллмана.

В первом параграфе рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + H(t,x,D_x\varphi(t,x)) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_T = [0,T] \times \mathbb{R}^n \tag{1}$$

с краевым условием

$$\varphi(T,x) = \sigma(x). \tag{2}$$

Здесь $D_x\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right) = s \in \mathbb{R}^n$.

Предполагается, что гамильтониан $H(t,x,s)$ и краевая функция $\sigma(x)$ удовлетворяют следующим условиям

A1 функция $H(t,x,s)$ непрерывна по всем переменным в $\Pi_T \times \mathbb{R}^n$ и вогнута по переменной s;

A2 существуют $D_xH(t,x,s), D_sH(t,x,s)$, которые удовлетворяют условию Липшица по x, s с константой $L > 0$

$$||D_sH(t,x_1,s_1) - D_sH(t,x_2,s_2)|| \leq L(||x_1 - x_2|| + ||s_1 - s_2||);$$

$$||D_xH(t,x_1,s_1) - D_xH(t,x_2,s_2)|| \leq L(||x_1 - x_2|| + ||s_1 - s_2||);$$

и условиям подлинейного роста :

$$||D_sH(t,x,s)|| \leq \rho(1 + ||x||),\ \forall s \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T];$$

$$||D_xH(t,x,s)|| \leq \Lambda(M)(1 + ||s||)\ \forall (t,x) \in M \subset \Pi_T;$$

A3 функция $\sigma(x)$ непрерывно дифференцируемая, а ее градиент $D_x\sigma(x)$ локально липшицевая функция, то есть $|D_x\sigma(x_1) - D_x\sigma(x_2)| \leq L_\sigma|x_1 - x_2|$.

Определение 1. Функция $\varphi(t,x)$ называется минимаксным решением задачи (1), (2), если для любых $s \in \mathbb{R}^n$ и $(t_0,x_0) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n$, $z_0 = \varphi(t_0,x_0)$, существует $\tau \in (t_0,T)$ и липшицевые функции $(x(\cdot),z(\cdot)) : [t_0,\tau] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, которые удовлетворяют равенству $x(t_0) = x_0$, $z(t_0) = z_0$, уравнению $\dot z = \langle \dot x, s\rangle - H(t,x,s)$, при прочти всех $t \in [t_0,\tau]$, и равенству $\varphi(t,x(t)) = z(t)$, при всех $t \in [t_0,\tau]$.

Определение 2. Супердифференциалом $D^+\varphi(t,x)$ функции $\varphi(t,x)$ в точке $(t,x) \in \Pi_T$ называются множества:

$$D^+\varphi(t,x) = \{(\alpha,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n :$$

$$\limsup_{\Delta t \to 0, ||\Delta x|| \to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t, x+\Delta x) - \varphi(t,x) - \langle(\alpha,s),(\Delta t,\Delta x)\rangle}{|\Delta t| + ||\Delta x||} \leq 0\}.$$

Характеристическая система задачи (1), (2) имеет вид

$$\dot{\tilde x} = D_{\tilde s}H(t,\tilde x,\tilde s), \quad \dot{\tilde s} = -D_{\tilde x}H(t,\tilde x,\tilde s), \qquad (3)$$
$$\dot{\tilde z} = \langle D_{\tilde s}H(t,\tilde x,\tilde s),\tilde s\rangle - H(t,\tilde x,\tilde s)$$

с краевым условием

$$\tilde x(T,\xi) = \xi,\ \tilde s(T,\xi) = D_\xi\sigma(\xi),\ \tilde z(T,\xi) = \sigma(\xi). \qquad (4)$$

Здесь $\xi \in \mathbb{R}^n$ — параметр, $D_{\tilde s}H = \left(\frac{\partial H}{\partial s_1},\ldots,\frac{\partial H}{\partial s_n}\right)$, $D_{\tilde x}H = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial H}{\partial x_n}\right)$.

Из предположений $A1$–$A3$ следует, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ решение задачи (3), (4) существует, единственно и продолжимо на отрезок $[0, T]$.

Из работ[2,6] вытекает

Утверждение 1. *При условиях $A1$-$A3$ минимаксное решение $\varphi(t, x)$ задачи Коши (1), (2) существует, единственно и обладает свойствами*

1. *Функция $\varphi(t, x)$ локально липшицева.*

2. *При всех $(t, x) \in \Pi_T$*

$$\varphi(t, x) = \min_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{\tilde{z}(t, \xi) : \tilde{x}(t, \xi) = x\}, \tag{5}$$

где $\tilde{x}(\cdot, \xi)$ — решения характеристической системы (3), (4).

3. *При всех $(t, x) \in \Pi_T$ не пуст супердифференциал $D^+\varphi(t, x)$, который имеет вид $D^+\varphi(t, x) =$*

$$co\{(-H(t, \tilde{x}(t, \xi), \tilde{s}(t, \xi)), \tilde{s}(t, \xi)) : \tilde{x}(t, \xi) = x, \quad \varphi(t, x) = \tilde{z}(t, \xi)\}, \tag{6}$$

где $\tilde{x}(\cdot, \xi), \tilde{s}(\cdot, \xi), \tilde{z}(\cdot, \xi)$—решения характеристической системы (3), (4).

Во втором параграфе исследуются свойства решений характеристической системы (3), (4) и функции $(t, x) \to \tilde{V}(t, x)$ конструируются согласно правилу

$$\forall (t, x) \in \Pi_T \;\; \exists \xi \in \mathbb{R}^n : \; \tilde{x}(t, \xi) = x, \; \tilde{V}(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)) = \tilde{z}(\tau, \xi); \quad \forall \tau \in [t, T], \tag{7}$$

где $\tilde{x}(t, \xi), \tilde{z}(t, \xi)$ решения характеристической системы (3), (4).

Введены условия

A4 Функция $\tilde{V}(t, x)$ локально липшицева и супердифференцируема, то есть для всех $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$ справедливо $D^+\tilde{V}(t, x) \neq \emptyset$;

A5 Сопряженные переменные $\tilde{s}(t, \xi)$ удовлетворяют условию

$$\forall\, (t, x) \in \Pi_T \quad \exists\, \xi \in \mathbb{R}^n : \; x = \tilde{x}(t, \xi), \; z = \tilde{z}(t, \xi),$$
$$\tilde{z}(\tau, \xi) = \tilde{V}(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)), \; \tilde{s}(\tau, \xi) \in D_x^+\tilde{V}(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)), \; \tau \in [t, T]$$

Здесь $D_x^+\tilde{V} = \{s \in \mathbb{R}^n : (\alpha, s) \in D^+\tilde{V}\}$

[6] *Subbotina N.N.* The method of characteristics for Hamilton-Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // Modern mathematics and its applications, 2004, Vol. 20. P. 2955–3091

Теорема 1. *Пусть в задаче (1), (2) выполнены условия A1–A3. Минимаксное решение $\varphi(t,x)$ этой задачи совпадает с функцией $\tilde{V}(t,x)$ вида (7), для которой при всех $(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n$ выполнены условия A4, A5.*

Следствием теоремы 1 является эквивалентность определения 1 следующему определению.

Определение 3. Локально липшицевая, супердифференцируемая функция $\varphi(t,x)$ называется минимаксным решением задачи Коши (1), (2), если

$$\forall\ (t,x) \in \Pi_T\ \exists\ \xi : \tilde{x}(t,\xi) = x,\ \tilde{z}(\tau,\xi) = \varphi(\tau, \tilde{x}(\tau,\xi)), \quad \forall\ \tau \in [t,T],$$

где $\tilde{x}(\tau,\xi), \tilde{z}(\tau,\xi)$ — решения характеристической системы (3), (4).

В третьем параграфе приведено

Определение 4. Множеством сингулярности для непрерывной функции $\varphi^*(t,x)$ называется множество точек $(t,x) \in \Pi_T$, в которых функция $\varphi^*(t,x)$ недифференцируема.

Множество сингулярности минимаксного решения φ задачи (1), (2) обозначено символом Q.

Теорема 2. *Пусть в задаче (1), (2) выполнены условия A1–A3. Для того, чтобы точка (t,x) принадлежала множеству сингулярности Q минимаксного решения $\varphi(t,x)$ этой задачи необходимо и достаточно, чтобы существовали такие $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, $\xi_1 \neq \xi_2$, что выполняются соотношения*

$$\tilde{x}(t,\xi_1) = \tilde{x}(t,\xi_2) = x,\ \tilde{z}(t,\xi_1) = \tilde{z}(t,\xi_2) = \varphi(t,x),\ \tilde{s}(t,\xi_1) \neq \tilde{s}(t,\xi_2). \tag{8}$$

Следствие 1. *Если множество сингулярности Q содержит линию Γ, описываемую гладкой функцией $t \to x(t)$, $0 < t_0 < t \leq T$, то на этой линии выполняется соотношение*

$$\langle \frac{dx(t)}{dt}, \tilde{s}(t,\xi_1) - \tilde{s}(t,\xi_2) \rangle = H(t, x(t), \tilde{s}(t,\xi_1)) - H(t, x(t), \tilde{s}(t,\xi_2)) \tag{9}$$

В четвертом параграфе рассмотрена начальная задача Коши для одномерного уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + H(D_x \varphi(t,x)) = 0, \quad \varphi(0,x) = \sigma(x), \tag{10}$$

где $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}$.

Задача рассмотрена при следующих предположениях

A1' функция $H(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема и строго выпукла;

A2' функция $\sigma(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Для этой задачи не существует минимаксного решения в смысле определений 1,3. Приведено модифицированное определение минимаксного решения и доказано, что при выполнении $A1'$, $A2'$ выполнены условия теоремы о существовании и единственности модифицированного минимаксного решения.

Вторая глава содержит три параграфа и посвящена исследованию обобщенного решения начальной задачи Коши для одномерного квазилинейного уравнения. Рассмотрена задача

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} - H_x(t,x,w(t,x)) = 0, \quad w(0,x) = D_x\sigma(x), \tag{11}$$

где

$$H_x(t,x,w(t,x)) = D_xH(t,x,w) + D_wH(t,x,w)\frac{\partial w}{\partial x},$$

$t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}$. Задача рассматривается при условиях $A1$–$A3$ на входные данные $H(t,x,w)$ и $\sigma(x)$ из первой главы.

Характеристическая система задачи (11) имеет вид

$$\dot{\tilde{x}} = -D_{\tilde{w}}H(t,\tilde{x},\tilde{w}), \quad \dot{\tilde{w}} = D_{\tilde{x}}H(t,\tilde{x},\tilde{w}), \tag{12}$$

начальные условия:

$$\tilde{x}(0,\xi) = \xi, \quad \tilde{w}(0,\xi) = D_x\sigma(\xi). \tag{13}$$

Рассматривается область $G_0 \in \Pi_T$ вида

$$G_0 = G_0[a,b] = \{(t,x) \in \Pi_T : x \in [\tilde{x}(t,a),\tilde{x}(t,b)], t \in [0,\tau]\}, \tau = \min\{t^*,T\} \tag{14}$$

где $\tilde{x}(\cdot,a)$, $\tilde{x}(\cdot,b)$—решения задачи (12), (13), t^*—первый момент пересечения характеристик $\tilde{x}(\cdot,a)$ и $\tilde{x}(\cdot,b)$.

Приведено определение локального обобщенного решения задачи (11) в смысле О.А. Олейник[7].

Определение 5. Функция $w_0(t,x) : G_0 \to \mathbb{R}$ является локальным обобщенным решением задачи (11), если выполняются условия

[7] *Олейник О.А.* О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций // Докл. Акад. наук СССР, 1954. Vol. 95. С. 451–454

C1 для точки $(t_1, x_1) \in G_0$, которая является точкой непрерывности функции $w_0(t,x)$, существует единственная характеристика $\tilde{x}(\cdot,\xi)$, $\tilde{w}(\cdot,\xi)$ такая, что

$$\tilde{x}(t_1,\xi) = x_1, \quad \tilde{w}(t,\xi) = w_0(t,\tilde{x}(t,\xi)),\ 0 \le t \le t_1.$$

C2 для точки $(t_1, x_1) \in G_0$, которая является точкой разрыва функции $w_0(t,x)$, найдутся по крайней мере две характеристики $\tilde{x}(t,\xi_1), \tilde{w}(t,\xi_1)$ и $\tilde{x}(t,\xi_2)$, $\tilde{s}(t,\xi_2)$, $\xi_1 \ne \xi_2$ такие, что

$$\tilde{x}(t_1,\xi_1) = x_1,\ \tilde{x}(t_1,\xi_2) = x_1,$$

$$\tilde{w}(t,\xi_1) = w_0(t,\tilde{x}(t,\xi_1)),\ \tilde{w}(t,\xi_2) = w_0(t,\tilde{x}(t,\xi_2)), \quad 0 \le t \le t_1.$$

C3 $\oint\limits_C H(w_0(t,x))dt - w_0(t,x)dx = 0$, где контур $C \in G_0$ образован отрезком $[\xi_1,\xi_2] \subset [a,b]$ и характеристиками $\tilde{x}(\cdot,\xi_1)$, $\tilde{x}(\cdot,\xi_2)$ из условия $C2$.

Здесь $\tilde{x}(\cdot,\xi), \tilde{w}(\cdot,\xi)$ — решение задачи (12), (13).

Два обобщенных решения задачи (11) совпадают, если они совпадают в точках непрерывности каждого из решений.

Утверждение 2. [8] *Если в задаче (11) выполнены условия* $A1$–$A3$*, то обобщенное решение задачи (11) в смысле определения* 5 *существует и единственно.*

Введено определение глобального обобщенного решения задачи (11).

Определение 6. Функция $w(t,x)$ называется глобальным обобщенным решением задачи (11) в полосе Π_T, если выполнены следующие условия

C1 если точка $(t_1, x_1) \in \Pi_T$ является точкой непрерывности функции $w(t,x)$, то существует единственная характеристика $\tilde{x}(\cdot,\xi)$, $\tilde{w}(\cdot,\xi)$ такая, что

$$\tilde{x}(t_1,\xi) = x_1, \quad \tilde{w}(t,\xi) = w(t,\tilde{x}(t,\xi)),\ 0 \le t \le t_1.$$

C2 если точка $(t_1, x_1) \in \Pi_T$ является точкой разрыва функции $w(t,x)$, то найдутся по крайней мере две характеристики $\tilde{x}(t,\xi_1), \tilde{w}(t,\xi_1)$ и $\tilde{x}(t,\xi_2)$, $\tilde{w}(t,\xi_2)$, $\xi_1 \ne \xi_2$ такие, что

$$\tilde{x}(t_1,\xi_1) = x_1,\ \tilde{x}(t_1,\xi_2) = x_1,$$

$$\tilde{w}(t,\xi_1) = w(t,\tilde{x}(t,\xi_1)),\ \tilde{w}(t,\xi_2) = w(t,\tilde{x}(t,\xi_2)), \quad 0 \le t \le t_1.$$

[8] *Олейник О.А.* О построении обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка путем введения «исчезающей вязкости» // Успехи мат. наук, 1959. Т. 14. № 2. С. 159–164

С3' $\oint\limits_C H(w(t,x))dt - w(t,x)dx = 0$, для произвольного замкнутого контура $C \in \Pi_T$.

Рассмотрена функция $w^*(t,x)$, удовлетворяющая условию

$$w^*(t,x) \in D_x^+\varphi(T-t,x), \ \forall (t,x) \in \Pi_T. \tag{15}$$

Здесь $\varphi(\cdot,\cdot)$ — минимаксное решение задачи Коши (1), (2), где гамильтониан H определен в уравнении (11).

Теорема 3. *Глобальное обобщенное решение задачи* (*11*) *существует, единственно и совпадает с функцией* w^*.

Рассмотрим сужение функции $w^*(t,x)$ на область G_0, то есть

$$w^*(t,x) = w_0^*(t,x), \quad (t,x) \in G_0 \tag{16}$$

Теорема 4. *Функция* $w_0^*(\cdot,\cdot): \ G_0 \to \mathbb{R}$ (*16*) *удовлетворяет определению* 5.

Рассмотрен частный случай стационарного уравнения, для которого получены формулы глобального обобщенного решения.

В третьем параграфе приведены определения слабого решения рассматриваемой задачи, введенного С.Л. Соболевым[9] и энтропийного решения, введенного С.Н. Кружковым[10].

Определение 7. Слабым решением краевой задачи (11) называется функция $w(t,x)$, которая для любой компактной области $\Omega \subset \Pi_T$ удовлетворяет равенству

$$\int\limits_{\Pi_T} w(t,x)f_t(t,x) - H(t,x,w(t,x))f_x(t,x)dtdx = 0, \quad \forall f(t,x) \in C_0^\infty(\Omega),$$

где $f(t,x)$ — произвольная тестовая функция, бесконечное число раз дифференцируемая, с компактным носителем в Ω.

Определение 8. Энтропийным решением задачи (11) называется функция $w(t,x)$, которая удовлетворяет условиям

[9] *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука. 1966. 444 с.

[10] *Кружков С.Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб., 1970. Т. 81, № 2. С. 228–255

1. $\forall\ \Omega \subset \Pi_T$, $\forall f(t,x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $f(t,x) \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\int_{\Pi_T} |w(t,x)-k| f_t(t,x) + \mathrm{sign}(w(t,x)-k)(H(t,x,k)-H(t,x,w(t,x)))f_x(t,x)dxdt \geq 0,$$

где $f(t,x)$ – произвольная тестовая функция, бесконечное число раз дифференцируемая, с компактным носителем в Ω;

2. $\forall [a,b]$ $\quad \lim\limits_{t\to+0} \int\limits_a^b w(t,x) - D_x\sigma(x)dx = 0.$

Теорема 5. *Глобальное обобщенное решение $w(t,x) = w^*(t,x)$ (15) является слабым и совпадает с единственным энтропийным решением задачи (11).*

В **третьей главе** показана связь между глобальным обобщенным решением $w(t,x)$ начальной задачи Коши (11) и минимаксным решением $\varphi(t,x)$ краевой задачи Коши (1), (2), где функция H определена в (11).

Для глобального обобщенного решения $w(t,x)$ введена функция

$$\tilde{\varphi}(t,x) = \int\limits_{(0,0)}^{(t,x)} w(\tau,y)dy + H(\tau,y,w(\tau,y))d\tau. \tag{17}$$

Из условия $C3'$ вытекает, что криволинейный интеграл второго рода (17) существует и не зависит от пути интегрирования.

Определение 9. Непрерывная функция $\tilde{\varphi}(t,x)$ вида (17) называется потенциалом функции $w(t,x)$.

Теорема 6. *Если $w(t,x)$ – глобальное обобщенное решение задачи (11), то существует потенциал $\tilde{\varphi}(t,x)$ для функции $w(t,x)$, и он связан с единственным минимаксным решением $\varphi(t,x)$ задачи (1), (2) соотношением*

$$\tilde{\varphi}(t,x) = \varphi(T-t,x), \quad \forall (t,x) \in \Pi_T.$$

Следствие 2. *Если в задаче (11) выполнены условия A1–A3, то глобальное обобщенное решение при всех $(t,x) \in \Pi_T$ удовлетворяет условию*

$$w(t,x) \in co\{\tilde{s}(T-t,\xi) :\ \tilde{x}(T-t,\xi) = x,\ \varphi(T-t,x) = \tilde{z}(T-t,\xi)\},$$

где $\tilde{x}(\cdot,\xi), \tilde{s}(\cdot,\xi), \tilde{z}(\cdot,\xi)$ – решения характеристической системы (3),(4).

Теорема 7. *Если в задачах (1), (2) и (11) выполнены условия A1–A3, тогда*

- *множество сингулярности Q минимаксного решения $\varphi(t,x)$ задачи (1), (2) совпадает с множеством точек разрыва глобального обобщенного решения $w(t,x)$ задачи (11);*
- *множество сингулярности Q минимаксного решения задачи (1), (2) состоит из не более, чем счетного числа линий $t \to x(t)$, удовлетворяющих условию Ранкина–Гюгонио*

$$\dot{x}(t) = \frac{-H(t,x(t),w_+(t,x(t))) + H(t,x(t),w_-(t,x(t)))}{w_+(t,x(t)) - w_-(t,x(t))},$$

$$\lim_{x\to x(t)+0} \varphi_x(t,x) = w_+(t,x(t)), \quad \lim_{x\to x(t)-0} \varphi_x(t,x) = w_-(t,x(t));$$

- *на линиях $t \to x(t)$ Ранкина–Гюгонио выполнено неравенство*

$$w_+(t,x(t)) < w_-(t,x(t)).$$

В параграфе четыре данной главы рассмотрены задачи (1), (2) и (11) для случая выпуклого гамильтониана вида $H = H(s)$. Приведено доказательство совпадения репрезентативных формул для минимаксного решения задачи (1), (2) и глобального обобщенного решения задачи (11) с формулами Лакса–Хопфа и Лакса–Олейник, соответственно.

В параграфе пять приведены иллюстративные примеры построения минимаксного и глобального обобщенного решения рассмотренных краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка.

Глава четыре посвящена приложению теории минимаксных решений уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана к решению задач оптимального управления с терминальным функционалом платы. В первом параграфе рассмотрена задача оптимального управления системой

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad u \in U, \quad x(t_0) = x_0. \tag{18}$$

Здесь $0 \le t_0 \le t \le T$, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, значения управления u выбираются из компакта $U \subset \mathbb{R}^m$. Допустимые управления выбираются из множества $\tilde{U}$ измеримых функций $u(\cdot) : [t_0, T] \to U$. Задача оптимального управления состоит в минимизации терминального функционала платы

$$I_{t_0,x_0}(x(\cdot),u(\cdot)) = \sigma(x(T;t_0,x_0,u(\cdot))) \to \inf_{u\in\tilde{U}}, \tag{19}$$

где $x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)) : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$ — траектория динамической системы (18), стартующая из начальной точки (t_0, x_0) под действием управления $u(\cdot) \in \tilde{U}$. Задача рассматривается при следующих предположениях

D1 Функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна на множестве $\Pi_T \times U$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

D2 $\left\|\frac{\partial f_i(t,x,u)}{\partial x_j}\right\| \le K_1(1 + \|x\|)$, $\left\|\frac{\partial f_i(t,x,u)}{\partial t}\right\| \le K_1(1 + \|x\|)$, $i, j = 1, \ldots, n$. Константа $K_1 > 0$.

D3 Терминальная функция $\sigma(x)$ определена и непрерывна на $\mathbb{R}^n$ вместе с $\frac{\partial \sigma}{\partial x_i}, i = 1, \ldots, n$.

D4 Множество $\arg \min\limits_{l \in F(t,x)} \langle s, l \rangle = \{l^0(t, x, s)\}$ состоит из единственного элемента при всех $s \neq 0$, $(t, x) \in \Pi_T$. Здесь $F(t, x) = \{f(t, x, u) : u \in U\}$.

Гамильтониан задачи (18), (19) имеет вид

$$H(t, x, s) = \min_{u \in U} \langle s, f(t, x, u) \rangle = \langle s, l^0(t, x, s) \rangle \tag{20}$$

Функция цены (оптимального результата) задачи (18), (19) — отображение

$$(t_0, x_0) \to Val(t_0, x_0) = \inf_{u(\cdot) \in \tilde{U}} I(x(\cdot), u(\cdot)). \tag{21}$$

Утверждение 3. *Если выполнены предположения $D1$–$D4$, то существует единственное минимаксное решение задачи Коши (1), (2), (20) для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Минимаксное решение задачи (1), (2), (20) совпадает с функцией цены в задаче (18), (19).*

Характеристическая система для задачи (1), (2), (20) имеет вид

$$\dot{\tilde{x}} = D_{\tilde{s}} H(t, \tilde{x}, \tilde{s}) = f(t, \tilde{x}, \tilde{s}), \quad \dot{\tilde{s}} = -D_{\tilde{x}} H(t, \tilde{x}, \tilde{s}) = -\langle f_x(t, \tilde{x}, \tilde{s}), \tilde{s} \rangle, \tag{22}$$
$$\dot{\tilde{z}} = \langle \tilde{s}, D_{\tilde{s}} H(t, \tilde{x}, \tilde{s}) \rangle - H(t, \tilde{x}, \tilde{s}) = 0,$$

краевое условие

$$\tilde{x}(T, \xi) = \xi, \ \tilde{s}(T, \xi) = D_x \sigma(\xi), \ \tilde{z}(T, \xi) = \sigma(\xi) \tag{23}$$

Условия $D1$–$D4$ гарантируют существование и продолжимость решений характеристической системы $\tilde{x}(\cdot, \xi)$, $\tilde{s}(\cdot, \xi)$, $\tilde{z}(\cdot, \xi)$, для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Во втором параграфе предложены новые достаточные условия существования программного оптимального управления в задаче (18),(19).

Теорема 8. *Если в задаче (18),(19) выполнены условия D1–D4 и справедливо*

$$\forall (t,x) \in \Pi_T \ \exists\, \xi^0 : \tilde{z}(t,\xi^0) = \min_{\xi\in\mathbb{R}^n}\{\tilde{z}(t,\xi) : \tilde{x}(t,\xi) = x\}, \ \ \tilde{s}(\tau,\xi^0) \neq 0, \ \ \tau \in [t,T],$$

то оптимальный результат (21) достигается на управлении $u^0(\cdot) \in \widetilde{U}$.

В третьем параграфе предложен численный метод для построения оптимального управления $u^0(\cdot) \in \tilde{U}$ в задаче (18), (19).

Пусть $x_* = \arg\min\{\sigma(x) : \ x = x(T;t_0,x_0,u(\cdot)), \ u(\cdot) \in \tilde{U}\}$. Символом N обозначим число $N = \frac{T}{h}$ точек разбиения t_i отрезка $[t_0,T]$ с шагом $\Delta t = h$.

Алгоритм численного метода.

1. Решение $\tilde{x}(\cdot,x_*)$, $\tilde{s}(\cdot,x_*)$ характеристической системы (22), (23), стартующее в момент времени T из точки $(x_*, D_x\sigma(x_*))$, аппроксимируется с помощью ломаных Эйлера с шагом $\Delta t = h$ по времени. Аппроксимирующее решение обозначено символами

$$x_\Delta(\cdot,x_*) : [t_0,T] \to \mathbb{R}^n, \quad s_\Delta(\cdot,x_*) : [t_0,T] \to \mathbb{R}^n.$$

Одновременно согласно теореме 8 строится кусочно-постоянное управление $u^*(\cdot)$, аппроксимирующее оптимальное управление $u^0(\cdot) \in \ \tilde{U}$.

2. Аппроксимация $\tilde{Val}(t_0,x_0)$ оптимального результата $Val(t_0,x_0)$ определяется следующим образом $\tilde{Val}(t_0,x_0) = \sigma(x(T,t_0,x_0,u^*(\cdot)))$.

Оценка точности $\Delta r(t) = ||\tilde{x}(t,x_*) - x_\Delta(t,x_*)|| + ||\tilde{s}(t,x_*) - s_\Delta(t,x_*)||$ численного интегрирования характеристической системы (22), (23) имеет вид

$$\Delta r(t) \leq \Delta r(t_0) \leq Tw\Big((1+T)\alpha + Tw(\alpha)\Big), \quad \forall\, t \in [t_0,T],$$

где $w(\cdot)$ — модуль непрерывности правых частей характеристической системы, параметр α удовлетворяет при всех $i = 0,\ldots,N-1$ условиям

$$\exists R > 0 : \max_{t\in[t_i,t_{i+1}]} \Delta r(t) \leq Rh, \ \alpha \in (0,1), \ w(Rh) + w(h) < \alpha, \ w(\alpha) + \alpha < 1.$$

Погрешность аппроксимации оптимального результата в задаче (18), (19) обозначена символом $\Delta Val = |Val(t_0,x_0) - \tilde{Val}(t_0,x_0)|$. Справедлива оценка

$$\Delta Val(t_0,x_0) \leq \Delta r(t_0)e^{L(T-t_0)}K, \text{ где } \max_{x\in \mathrm{co}\{x^*,x(T,t_0,x_0,u^*(\cdot))\}+B^\varepsilon} ||D_x\sigma(x)|| \leq K,$$

$$L = \max\{||\frac{\partial f_i(t,x,u)}{\partial x_j}|| : \ i,j = 1,\ldots,n, \quad t \in [t_0,T], \ x \in X, \ u \in U\},$$

$X = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(t, t_0, x_0', u(\cdot)),\ t \in [t_0, T],\ ||x_0' - x_0|| \le \Delta r(t_0),\ u(\cdot) \in \tilde{U}\}$.

В четвертом параграфе данной главы рассмотрены два примера, иллюстрирующие применение предлагаемого численного метода. В первом примере приведена нелинейная модель математического маятника, получена формула непрерывного оптимального программного управления, приведены оценки численной аппроксимации оптимального результата. Рассмотрен пример А.А. Первозванского, в котором автономная управляемая система является сингулярно возмущенной и колебательной. Для этого примера построено непрерывное оптимальное управление и его численная аппроксимация. Предложен алгоритм численного нахождения корней трансцендентного уравнения, определяющих моменты, в которые оптимальное управление меняет структуру. Получена оценка погрешности вычисления оптимального результата с помощью предложенной аппроксимации оптимального управления.

Основные публикации по теме диссертации

[1] *Субботина Н.Н. Колпакова Е.А.* Об определении асимптотики одного класса сингулярно возмущенных задач вибрационной механики // Автоматика и Телемеханика, 2007, Т. 11. С. 150–163

[2] *Колпакова Е.А.* Об определении класса оптимального управления с помощью метода харктеристик // Вестник Удмуртского университета "Математика. Механика. Компьютерные науки", 2008, вып. 2. С. 59–60

[3] *Субботина Н.Н. Колпакова Е.А.* О структуре локально липшицевых минимаксных решений уравнения Гамильтона - Якоби - Беллмана в терминах классических характеристик // Труды института математики и механики УрО РАН, 2009, Т.15, № 3. С. 202–218

[4] *Колпакова Е.А. Субботина Н.Н.* Численное решение оптимизационных задач вибрационной механики с помощью метода характеристик // Прикладная математика и механика, 2010, Т. 74, вып. 5. С. 832–839

[5] *Subbotina N.N. Kolpakova E.A* On a Linear -Quadratic Optimal Control Problem with Geometric Restriction on Controls // International Journal of Tomography and Statistics, 2007, Vol. 5, № W07 Issue 1. P.62–67

[6] *Subbotina N. Kolpakova E.* The method of characteristics in solving optimal control problems with terminal costs // Proceedings of the IFAC Workshop on Control Applications of Optimization, 2009, Vol. 7, Part 1. University of Jyvaskyla, Finland. Identifier: 10.3182/20090506-3-US-00058; http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/41929.html

[7] *Колпакова Е.А.* Аппроксимация минимаксного решения сингулярно возмущенного уравнения Гамильтона - Якоби -Беллмана в примере А.А. Первозванского // Труды международного семинара по теории управления и обобщенных решений уравнений Гамильтона -Якоби - Беллмана, 2006, Т. 1. С. 100–107

[8] *Колпакова Е.А.* Об интегрировании характеристической системы в примере А. А. Первозванского // Сборнике трудов XXXVII региональной конференции молодых ученых "Проблемы математики и ее приложение", 2006. С. 331–334

[9] *Субботина Н.Н. Колпакова Е.А.* О численном решении одного класса оптимизационных задач вибрационной механики // Труды IX -й международной конференции, посвященной 105- й годовщине Н.Г. Четаева, 2007, Т. 3. С. 220–229

[10] *Колпакова Е.А.* Оценка численной аппроксимации оптимального результата для одного класса сингулярно возмущенных задач оптимального управления // Труды 39-й Всероссийской молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики", 2008. С. 265–269

[11] *Субботина Н.Н. Колпакова Е.А.* Достаточные условия минимаксного решения в терминах классических характеристик // Труды 40-й Всероссийской молодежной конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики", 2009. С. 255–259

[12] *Колпакова Е.А.* Обобщенный метод характеристик в теории уравнений Гамильтона - Якоби и законов сохранения // Труды института математики и механики УрО РАН, 2010, Т. 16, № 5. Доп. номер. С. 95–102

Колпакова Екатерина Алексеевна

СТРУКТУРА ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА - ЯКОБИ - БЕЛЛМАНА И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Автореферат

Подписано в печать 16.03.2011
Формат 60x84 1/16. Объем 1 п.л.
Тираж 150 экз. Заказ № 2773

Отпечатано в типографии
ООО «Издательство УМЦ УПИ»
620078, Екатеринбург, ул. Гагарина, 35а, оф. 2.
тел. (343) 362-91-16, 362-91-17